

Ermittlung der durchschnittlichen Kapitalbindungsdauer (Duration) und der Zinselastizität

(1) Grundgedanke der Duration (Zinssensibilität und mittlere Kapitalbindungsdauer)

Nachdem anhand der Kritik an der dynamischen Amortisationsrechnung deutlich wurde, dass eine einfache pauschale Messung des Risikogehalts von Investitions- oder Finanzierungsprojekten nicht möglich ist, soll mit der *Duration*¹⁵⁹ im Folgenden ein unkompliziertes Konzept vorgestellt werden, mit dessen Hilfe man eine besonders wichtige Risikoart, nämlich das *Zinsänderungsrisiko*¹⁶⁰ – exakter gesagt, das *barwertbezogene Zinsänderungsrisiko*¹⁶¹ – abschätzen und darstellen kann.

¹⁵⁶ Vgl. *Altrogge* (Fn. 99), S. 303–305.

¹⁵⁷ Vgl. *Grob* (Fn. 79), S. 30 f.; *Schäfer* (Fn. 33), S. 148 f.; *ter Horst* (Fn. 65), S. 82 f.

¹⁵⁸ Für eine weitere Beschäftigung mit der Agency-Theorie vgl. *Eilenberger* (Fn. 7), S. 374–378; *Gerke/Bank*, Finanzierung, 2. Aufl. 2003, S. 34–40, sowie die in Fn. 43 aufgeführten Literaturstellen.

¹⁵⁹ Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf den Grundtypus des Durationskonzepts (auch Macaulay-Duration genannt). Zur chronologischen Übersicht der Weiterentwicklungen und zentraler Variationen vgl. *Bruns/Meyer-Bullerdiek*, Professionelles Portfoliomanagement, 4. Aufl. 2008, S. 283–289; *Eller* (Fn. 123), S. 43 f.

¹⁶⁰ Zu den Erscheinungsformen des Zinsänderungsrisikos vgl. *Jahrmann* (Fn. 40), S. 310.

¹⁶¹ Das barwertbezogene Zinsänderungsrisiko wird auch als Barwertsensitivität bezeichnet. Vgl. *Gerke/Bank* (Fn. 158), S. 111.

II. Investitionsplanung und Wirtschaftlichkeitsrechnung

Die Duration ist eine Maßzahl, die geeignet ist, das barwertbezogene Zinsänderungsrisiko exakt zu beschreiben und planbar zu machen. Auf Basis der Duration lässt sich weiter die *Zinselastizität* ermitteln, die als praktisches und anwendungsfreundliches *Risikomaß* gilt. Auch dieses Verfahren baut auf der Analyse der zeitlichen Struktur der Zahlungsströme eines Projekts auf¹⁶² und geht von sicheren Erwartungen hinsichtlich der Zahlungsreihe aus.

Hierzu soll zunächst der Begriff des Zinsänderungsrisikos sowie dessen Ursache und Wirkung geklärt werden. Als Zinsänderungsrisiko i. w. S. wird die Möglichkeit bezeichnet, dass ein Investor oder Schuldner aufgrund einer Variation des Marktzinssatzes eine im Hinblick auf seine Ziele als negativ zu bewertende Vermögens- oder Einkommensveränderung erzielt.

Die verschiedenen Facetten des Zinsänderungsrisikos i. w. S. werden in folgender Unterscheidung deutlich:

(a) Absolutes versus relatives Zinsänderungsrisiko

Als *absolutes* Zinsänderungsrisiko bezeichnet man die Folgen einer Veränderung des Anlage- oder Schuldzinssatzes in die aus Sicht des Betroffenen ungünstige Richtung, d. h. eine Zinssenkung bei einer Anlage oder eine Zinsanhebung bei einem Kredit. In diesen Fällen werden die *absoluten Erträge des Betroffenen sinken* oder aber *die absoluten Kreditkosten ansteigen*. Das absolute Zinsänderungsrisiko wird oftmals auch *Zinsänderungsrisiko im engeren Sinne* genannt.

Als *relatives Zinsänderungsrisiko* bezeichnet man den Nachteil im Sinne von *Opportunitätskosten*, der dadurch entsteht, dass sich die Marktzinssätze zwar zugunsten eines Anlegers oder Schuldners ändern, dieser jedoch *an der Veränderung nicht teilhaben kann*, da er bereits zuvor einen Festzinsvertrag geschlossen hat.

Beispiel:

Ein Anleger hat einen zehnjährigen Sparvertrag zu 6 % abgeschlossen. Wenige Monate nach Abschluss ist der Anlagezins für zehnjähriges Kapital auf 7,5 % gestiegen. Der Anleger hat keinen absoluten Schaden (denn er erhält ja die versprochenen 6 % p. a.), aber es entgeht ihm der Mehrertrag von jährlich 1,5 Prozentpunkten.

In gleicher Weise unterliegt ein Kreditnehmer dem relativen Zinsänderungsrisiko, wenn er einen Festzinskredit vereinbart hat und nach Abschluss des Kreditvertrags die Zinssätze sinken. Während nämlich im gegebenen Fall die Konkurrenz nun zu günstigeren Kreditkosten finanzieren kann, ist der o. a. Kreditnehmer für die Restlaufzeit der Vereinbarung an die Erfüllung seines (vergleichsweise teuren) Kreditvertrags gebunden.

Das *relative Zinsänderungsrisiko – auch Barwertsensitivität*¹⁶³ – bewirkt Wertänderungen von Anlage- oder Kreditverträgen, wie z. B. traditionellen Kuponanleihen, in denen marktunabhängige Festzinssätze vereinbart sind. Beispielsweise wird eine langfristige Festzinsanleihe durch eine Steigerung des Marktzinses unattraktiver, was im Fall einer Börsennotierung durch einen entsprechenden *Kursverlust* zum Ausdruck

¹⁶² Vgl. Bodie/Kane/Marcus, Investments, 8th ed., Boston 2009, S. 513–515; Bleis (Fn. 93), S. 156–160, sowie Brealey/Meyers/Allen, Principles of Corporate Finance, 9th ed., New York 2008, S. 63–65.

¹⁶³ Vgl. Gerke/Bank (Fn. 158), S. 112.

kommt. Aus diesem Grunde wird die Auswirkung relativer Zinsänderungen auch als *Wertänderungsrisiko* (oder *Kursrisiko*) bezeichnet. Bemerkenswert ist, dass das Risiko der Barwertsensitivität auch dann besteht, wenn ein Finanzkontrakt nicht *börsennotiert* ist. In diesem Falle werden lediglich die entstandenen Opportunitätskosten oder die entgangenen Opportunitätsgewinne nicht explizit deutlich gemacht.

Abgesehen von spezifischen Kapitalanlage- bzw. Finanzierungsvereinbarungen, bei denen der Investor bzw. Schuldner gegen Gebühr ein *Konditionenwahlrecht* (*Optionsrecht* auf den Wechsel zwischen garantiertem Festzins oder variablem Marktzins) eingeräumt erhält, muss sich der Entscheidungsträger bei jeder Investition oder Mittelaufnahme dem *Dilemma zwischen absolutem oder relativem Zinsänderungsrisiko* stellen. Der Ausschluss des absoluten Zinsänderungsrisikos bewirkt dabei zwangsläufig die Übernahme des relativen Zinsänderungsrisikos und umgekehrt.¹⁶⁴

(b) Barwertbezogenes versus endwertbezogenes Zinsänderungsrisiko

Will ein Investor ein in Geldeinheiten definiertes Anlageziel an einem bestimmten zukünftigen Anlagehorizont erreichen, so muss sich die Analyse des Zinsänderungsrisikos auf den entsprechenden Zeitpunkt richten. Von Interesse ist hier also das *endwertbezogene Zinsänderungsrisiko*.

Eine völlig andere Fragestellung ergibt sich, wenn die Auswirkungen von Marktzinsänderungen auf den *Gegenwartswert* (*Barwert*, ggf. *Kurswert*) einer Anlageposition sichtbar gemacht werden sollen. Oftmals wollen beispielsweise bilanzierungspflichtige Investoren die Gefahr von (durch Steigerungen des Marktzinssatzes ausgelösten) Sonderabschreibungen auf festverzinsliche Wertpapiere minimieren. Sie werden sich folglich für das gegenwartsbezogene (barwertbezogene) Zinsänderungsrisiko interessieren.

Auch hier steht der Entscheidungsträger wiederum in einem *Dilemma zwischen endwertorientiertem und barwertorientiertem Zinsänderungsrisiko*. Er muss entscheiden, welche Risikoart seine konkreten Ziele stärker gefährdet, da er nicht beide Risiken simultan ausschließen kann. Das Konzept der Duration bietet gleichermaßen für das Management des barwertorientierten als auch des endwertorientierten Zinsänderungsrisikos sehr interessante Lösungsansätze.¹⁶⁵ Im Folgenden soll lediglich auf die Möglichkeit zur Abschätzung des relativen Zinsänderungsrisikos in Form von Barwertveränderungen (*Barwertsensitivität*) eingegangen werden.

Bereits im Zusammenhang mit der Kapitalwertmethode sowie der Errechnung interner Zinsfüße wurde angesprochen, dass das *Ausmaß der Vorteilhaftigkeit* von Projekten bei gegebener Zahlungsreihe eine *Funktion des Kalkulationszinssatzes* darstellt. Aus der Angabe eines Kapitalwerts oder einer internen Verzinsung allein lassen sich daher hinsichtlich der Entwicklung der Einkommenswirkung des Projekts in Abhängigkeit vom Kalkulationszinssfuß keine Schlüsse ziehen. Dies wird an folgendem (extremen) *Beispiel* zweier Investitionsprojekte deutlich:

¹⁶⁴ Vgl. *Jahrmann* (Fn. 40), S. 310.

¹⁶⁵ Vgl. *Walz/Gramlich*, *Die Bank* 1991, 208–213; *Walz/Gramlich*, *Anlagepraxis* 1991, Nr. 3, 28–31, Nr. 4, 22–26.

II. Investitionsplanung und Wirtschaftlichkeitsrechnung

	t_0	t_1	t_2	$t_3 \dots$	t_{10}
Projekt A:	-100	+121	-	-	-
Projekt B:	-100	-	-	...	+285,31

Beide Projekte erzielen bei einem Kalkulationszinsfuß von 10% einen Kapitalwert von +10, d. h. sind im Hinblick auf das Einkommensziel gleich vorteilhaft.

Durch Ermittlung von Kapitalwerten, die auf unterschiedlichen Zinssätzen basieren, kann der *Grad der Zinsempfindlichkeit von Projekten*, d. h. das Ausmaß der Einkommensveränderung in Abhängigkeit vom Kalkulationszinssatz, festgestellt werden. Bei Anwendung dieser Vorgehensweise ergibt sich:

$i =$	0%	2,5%	5%	7,5%	10%
$C_0(A) =$	+ 21	+ 18,05	+15,24	+12,56	+10
$C_0(B) =$	+185,31	+122,88	+75,16	+38,43	+10

$i =$	15%	20%	25%	30%	50%	$\rightarrow \infty$ ¹⁶⁶
$C_0(A) =$	+ 5,22	+ 0,83	- 3,20	- 6,92	-19,33	-100
$C_0(B) =$	-29,48	-53,92	-69,37	-79,30	-95,05	-100

Die *extrem abweichende Barwertsensitivität* der Projekte wird anhand des unterschiedlich steilen Verlaufs der Kapitalwertkurven in Abbildung 17 deutlich, wäre jedoch für

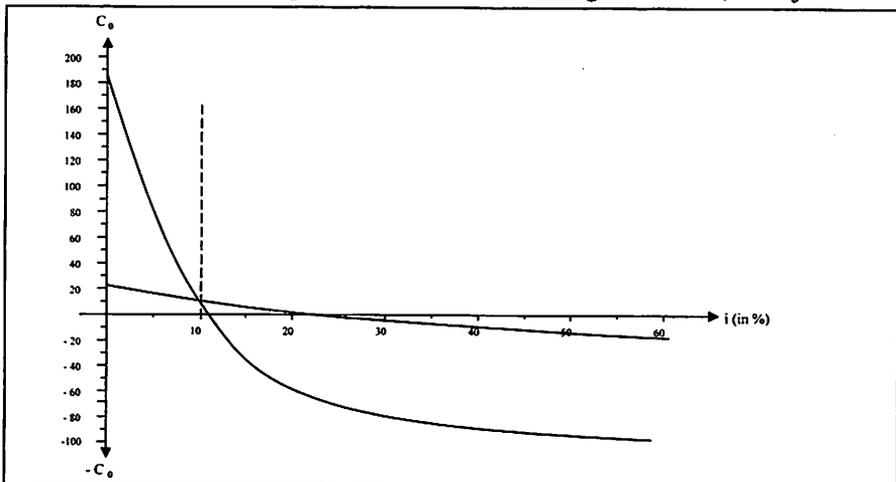


Abbildung 17: Verlauf der Kapitalwertfunktion zweier Investitionsprojekte mit extrem unterschiedlicher Duration, die jedoch bei einem Kalkulationszinssatz von 10% ein identisches Einkommen besitzen

¹⁶⁶ Theoretischer Grenzwert, den der Kapitalwert erreicht, wenn das Zinsniveau gegen unendlich strebt.

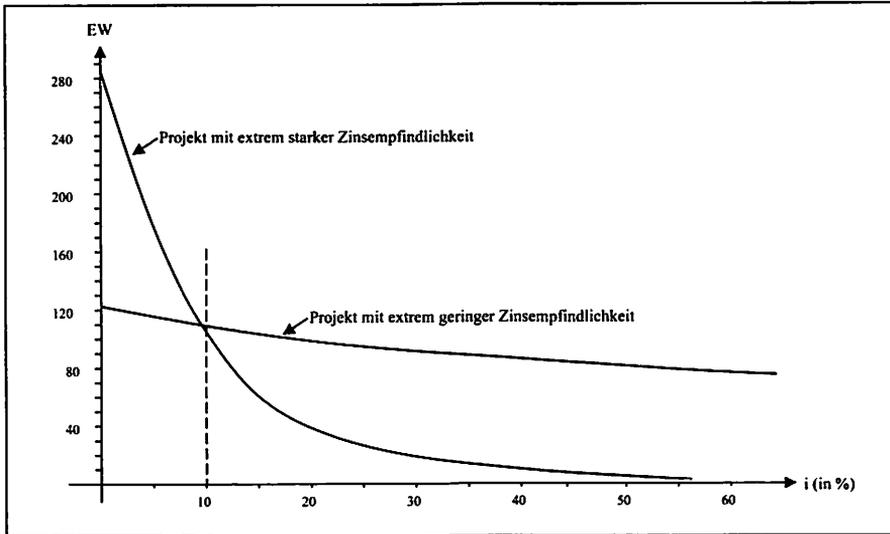


Abbildung 18: Verlauf der Ertragswertfunktion zweier Investitionsprojekte mit extrem unterschiedlicher Duration, jedoch identischem Einkommen bei einem Kalkulationszinssatz von 10%

den Entscheidungsträger, der lediglich die Vorteilhaftigkeit bei $i = 10\%$ prüft, nicht erkennbar gewesen.

Trägt man bei der Darstellung der beiden Projekte nicht den Kapitalwert, sondern den Ertragswert auf der Ordinate ab, so ergibt sich jeweils eine Parallelverschiebung der beiden Funktionen um den Betrag der Anfangsauszahlungen nach oben; die entsprechenden Ertragswerte streben bei steigenden Kalkulationszinssätzen – jedoch unterschiedlich schnell – gegen den Wert Null.¹⁶⁷ Somit erhält man die modifizierte Abbildung 18. Einen rechentechnisch einfacheren Indikator für die Zinsempfindlichkeit von Projekten, welcher die Ermittlung einer Vielzahl von Barwerten überflüssig macht, bietet das nachfolgend vorgestellte Konzept der Duration.

Der Errechnung der *Duration* liegt die zuerst von *Macaulay*¹⁶⁸ gewonnene Erkenntnis zugrunde, dass die Zinsempfindlichkeit von Investitions- und Finanzierungsalternativen davon abhängt, wie lange die vom Projekt ausgelösten Zahlungen im Durchschnitt bis zu ihrem Zufluss benötigen. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf die *Macaulay-Duration*, d. h. wenn von Duration gesprochen wird, ist stets die *Macaulay-Duration* gemeint. Erst im letzten Unterpunkt (Punkt (8)) werden Varianten und Weiterentwicklungen der *Macaulay-Duration* vorgestellt.

¹⁶⁷ Die Überführung von Kapitalwertfunktionen in Ertragswertfunktionen erfolgt, weil das Durationskonzept sowie die Ermittlung der Zinselastizität am Steigungsmaß der Ertragswertkurve anknüpfen. Die Höhe der Zahlung in t_0 ist für die Duration irrelevant.

¹⁶⁸ Vgl. *Macaulay*, *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856*, New York 1938.

II. Investitionsplanung und Wirtschaftlichkeitsrechnung

(2) Definition der Duration

Als Duration, auch „*durchschnittliche Bindungsdauer*“,¹⁶⁹ „*durchschnittliche Fälligkeit eines Zahlungsstromes*“,¹⁷⁰ „*ökonomische Laufzeit*“, „*mittlere Selbstliquidierungsperiode*“¹⁷¹ oder „*mittlere Restbindungsdauer*“¹⁷² einer Investition genannt, bezeichnet man denjenigen Zeitraum, den der Investor im Mittel bis zum Erhalt der Rückflüsse aus der Anlage warten muss. Bei einem Finanzierungsprojekt kann man die Duration als *durchschnittliche Kapitalüberlassungsdauer*, d. h. diejenige Frist verstehen, für welche man das Kapital im Mittel zur Verfügung bekommen hat. Dies bedeutet: Die Duration ist die *betragsmäßig gewichtete durchschnittliche Laufzeit* aller *zukünftigen* Zahlungen eines Projekts.

Beispiel:

Eine Investition bewirkt folgende Zahlungsreihe:

t_0	t_1	t_2	t_3
-800	+500	-	+500

Die Höhe des *Kapitaleinsatzes* in t_0 bleibt bei der Ermittlung der Duration unbeachtet. Es geht lediglich darum festzustellen, wie lange die *künftigen Zahlungsausprägungen*, d. h. die Werte von t_1 bis t_3 *im gewogenen Mittel* auf sich warten lassen. Bereits ohne genau zu rechnen, kann man im obigen einfachen Beispiel abschätzen, dass die durchschnittliche Kapitalbindungsdauer bei zirka zwei Jahren liegt, da die in t_1 sowie in t_3 anfallenden Zahlungen nominell gleich groß sind. Bei exakter Rechenweise müsste ein etwas unter zwei Jahren liegendes Ergebnis erzielt werden, da der Barwert der in t_3 eintretenden Zahlung aufgrund der Abzinsung unter dem Barwert der in t_1 anfallenden Zahlungen liegt.

Somit werden bereits einige wichtige Eigenschaften der *Duration* erkennbar:¹⁷³

- Die *Duration hängt vom Kapitalmarktzins ab*, weil die Höhe der Abzinsungsfaktoren das relative Gewicht bestimmt, mit dem die Zahlungsausprägungen in die Kennziffer eingehen. Da das Ausmaß der Abzinsung mit steigendem Zinsniveau zu- und folglich der Barwert der Zahlungsreihe abnimmt, muss die Duration einer Zahlungsreihe zu einem bestimmten Zeitpunkt umso kleiner sein, je höher der Kalkulationszinsfuß ist, da der mit der Laufzeit gewichtete Zähler relativ stärker abnimmt als der ungewichtete Nenner der *Durationsformel*.¹⁷⁴
- Die *Duration sinkt bei sonst konstanten Daten allein durch den Zeitablauf*, da der Zeitpunkt des Erhalts der Zahlungen mit jedem Tag näherrückt. Berechnet man die Duration eines bestimmten Projekts nach einer gewissen Zeit erneut, so hat sie sich verringert. Die Duration ist somit *keine zeitstabile Größe*.

169 Eller (Fn. 123), S. 33. Vgl. auch Jahrmann (Fn. 40), S. 125; Ryan (Fn. 100), S. 54.

170 Eller (Fn. 123), S. 33.

171 Steiner/Bruns, Wertpapiermanagement, 9. Aufl. 2007, S. 165.

172 Vgl. Bodie/Kane/Marcus (Fn. 162), S. 516; Gerke/Bank (Fn. 158), S. 115.

173 Vgl. Eller (Fn. 123), S. 32–34.

174 Vgl. zur Durationsformel die anschließend unter (3) folgenden Ausführungen. Eine Ausnahme bildet lediglich der Sonderfall, bei dem die Zahlungsreihe neben der Anfangszahlung nur aus einer einzigen Ausprägung besteht.

- Die Duration ist immer kürzer als die Restlaufzeit eines Projekts, sofern dieses neben der Zahlung in t_0 mindestens zwei Zahlungsausprägungen besitzt. Enthält ein Projekt (beispielsweise ein Zero-Bond) nur eine Zahlungsausprägung, so entspricht die Duration stets der Restlaufzeit und ist unabhängig vom Zinsniveau.

(3) Ermittlung der Duration einer Zahlungsreihe

Um die durchschnittliche betragsmäßig und zeitlich gewichtete Bindungsdauer einer Investition zu erhalten,¹⁷⁵ werden zunächst – ausgehend von einem situationsadäquaten Zinssatz – die Barwerte der einzelnen Zahlungsausprägungen ermittelt.¹⁷⁶ Dann wird jeder Barwert mit der Anzahl von Perioden (z. B. Tagen, Monaten, Jahren) gewichtet, die noch ausstehen, bis die Zahlung eintritt. Beispielsweise wird eine in drei Jahren eintretende Zahlung mit dem Faktor „drei“ multipliziert, wenn die Duration in der Einheit „Jahre“ bestimmt werden soll. Das Zwischenergebnis ist ein *zeitlich gewichteter Barwert*, der auf die Einheit „Währung mal Jahre“ (also z. B. Euro mal Jahre) lautet. Dieser Arbeitsgang wird für alle Ausprägungen einer Zahlungsreihe wiederholt. Anschließend bildet man die Summe der multiplizierten Barwerte und erhält somit den mit den Wartezeiten gewichteten Ertragswert der Zahlungsreihe. Teilt man diese Größe durch den einfachen Ertragswert der Zahlungsreihe (Summe aller Barwerte), so ergibt sich die durchschnittliche Kapitalbindungsdauer, die auf das der Rechnung zugrunde gelegte Zeitmaß (z. B. Jahre) lautet.¹⁷⁷

Entsprechend kann man folgende *Formel zur Errechnung der Macaulay-Duration* verwenden, in deren Zähler der mit der jeweiligen Zeit gewichtete Ertragswert und in deren Nenner der konventionelle Ertragswert der Zahlungsreihe ermittelt wird:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^n t \times R_t \times (1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^n R_t \times (1+i)^{-t}},$$

wobei R_t = Rückfluss im Zeitpunkt t ,
 t = Zeitindex ($1 \leq t \leq n$),
 n = letztes Jahr, in dem das Projekt Zahlungen verursacht,
 i = Kalkulationszins / Marktzins,
 D = Duration (nach Macaulay).

(4) Interpretation der Duration und Erstellung von Vorteilhaftigkeitsempfehlungen

Um die Anschaulichkeit der *durchschnittlichen Kapitalbindungsdauer* zu erhöhen, soll auf ein konkretes Zahlenbeispiel zurückgegriffen werden:

¹⁷⁵ Die Ermittlung der Duration ist nur bei reinen Projekten sinnvoll, da es unlogisch wäre, die durchschnittliche Wartezeit auf Auszahlungen und auf Einzahlungen zu saldieren.

¹⁷⁶ Für Projekte, die regelmäßige Zahlungsreihen bewirken, wie z.B. Kuponanleihen, ergeben sich vereinfachte Berechnungsmöglichkeiten. Gleiches gilt für Spezialfälle, wie beispielsweise Projekte mit unendlicher Laufzeit.

¹⁷⁷ Vgl. Bodie/Kane/Marcus (Fn. 162), S. 516; Brealey/Meyers/Allen (Fn. 162), S. 64.

II. Investitionsplanung und Wirtschaftlichkeitsrechnung

	t ₀	t ₁	t ₂	t ₃	t ₄	t ₅
A	-10000	-	-	+8000	+8000	-
B	-10000	+3620	+3620	+3620	+3620	-
C	-10000	+7000	+6183	-	-	-
D	-10000	-	-	-	-	+18479

Bei einem Kalkulationszinssatz von $i = 10\%$ gilt:

$$C_{0A} = C_{0B} = C_{0C} = C_{0D} = +1474.$$

Die nach obiger Formel ermittelten Werte für die *Macaulay-Duration* lauten wie folgt:¹⁷⁸

$$D_A = \frac{39887,76}{11474} = 3,476 \text{ Jahre,}$$

$$D_B = \frac{27323,62}{11474} = 2,381 \text{ Jahre,}$$

$$D_C = \frac{16583,51}{11474} = 1,445 \text{ Jahre,}$$

$$D_D = \frac{57370,-}{11474} = 5,000 \text{ Jahre.}$$

Anhand des Projekts D lässt sich der bereits angesprochene *Sonderfall* zeigen: Bewirkt ein Projekt nur eine einzige Zahlung (*beispielsweise ein Zerobond*), so entspricht die Duration stets der Zeit bis zum Zufluss dieser Zahlung (also der Zeit bis zur Endfälligkeit) und ist vom Kalkulationszinsfuß unabhängig.

Je größer die Duration eines Projekts ist, desto steiler verläuft seine Ertragswertfunktion. Es besteht somit ein *positiver Zusammenhang zwischen durchschnittlicher Kapitalbindungsdauer und dem Zinsänderungsrisiko* eines Projekts. Dieser Zusammenhang ist für kleine Zinsänderungen proportional.¹⁷⁹ Aus dieser Erkenntnis lassen sich – ausgehend vom gegebenen Einkommen eines Investitionsprojekts auf Basis des aktuellen Zinsniveaus – folgende einfache Entscheidungsregeln ableiten:

- Das Investitionsprojekt mit der *größten Duration* ist auszuwählen, wenn man erwartet, dass das *Zinsniveau fallen* wird und eine möglichst *effiziente Spekulation*¹⁸⁰ auf den Zinstrend gewünscht ist.

¹⁷⁸ Zur Ermittlung wurden die im Anhang befindlichen Abzinsungstabellen verwendet.

¹⁷⁹ Vgl. *Ingersoll/Skelton/Weil*, Journal of Financial and Quantitative Analysis 1978, 631.

¹⁸⁰ Unter effizienter Spekulation versteht man, dass mit gegebenem Kapitalbetrag eine möglichst große Wertänderung realisiert werden soll.

3. Dynamische Verfahren der Investitionsrechnung

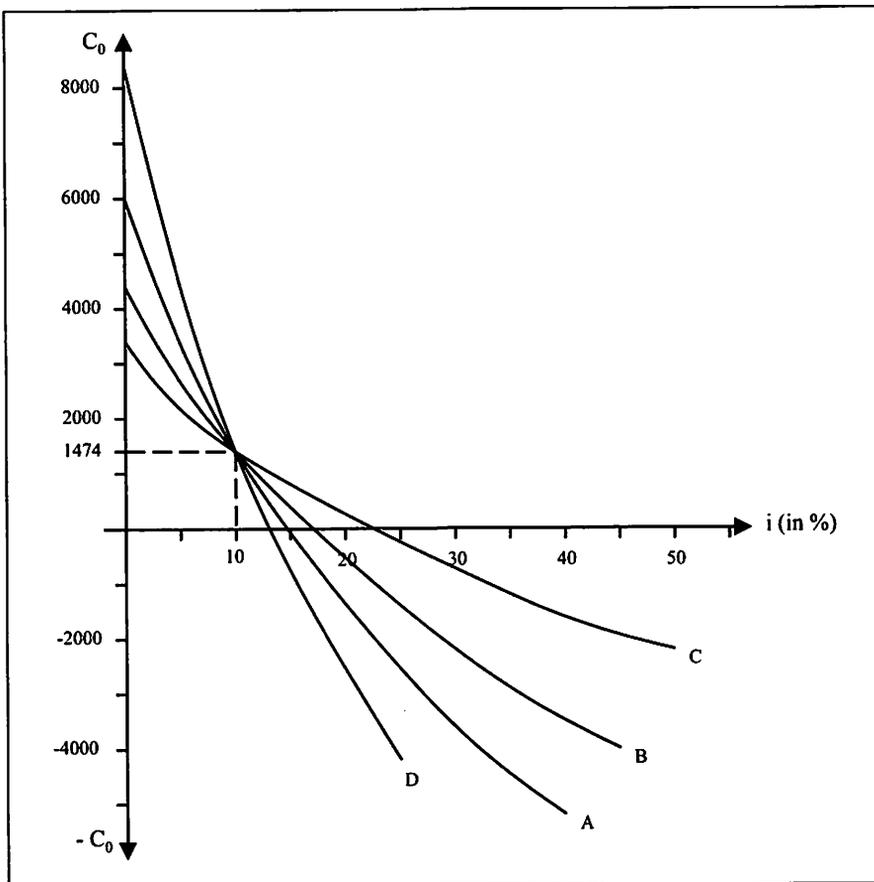


Abbildung 19: Kapitalwertkurvenverläufe der Investitionen A bis D in Abhängigkeit vom Marktzinssatz

- Das Investitionsprojekt mit der geringsten Duration ist auszuwählen, wenn man erwartet, dass das Zinsniveau steigen wird oder die Wirkung möglicher Zinsänderungen auf den Ertragswert des Projekts begrenzt werden soll.

Bei einem *Finanzierungsprojekt* ergeben sich gerade entgegengesetzte Vorteilhaftigkeitsempfehlungen, nämlich:

- Maximierung der Duration bei Erwartung steigender Zinssätze,
- Minimierung der Duration bei Erwartung fallender Zinssätze oder bei dem Bestreben, den Ertragswert möglichst zinsstabil zu halten.

Die vorstehende Abbildung 19 verdeutlicht den positiven Zusammenhang zwischen Duration und Zinsempfindlichkeit nochmals grafisch anhand der oben dargestellten Projekte A bis D. Hierbei lässt sich auch das häufig unter Praktikern anzutreffende *Misverständnis* ausräumen, dass die Zinsempfindlichkeit von Projekten auf deren Ge-

II. Investitionsplanung und Wirtschaftlichkeitsrechnung

samtlaufzeit oder Restlaufzeit zurückzuführen sei, da Projekt A eine erheblich höhere Duration aufweist als Projekt B, obwohl die Gesamtlaufzeit beider Anlagen identisch ist.

(5) Zusammenhang zwischen Duration und Zinselastizitäten

Das Ausmaß der Zinsempfindlichkeit eines Projekts lässt sich – wie oben gezeigt – anhand des Steigungsverlaufs der Kapitalwertkurve beziehungsweise der entsprechenden Ertragswertkurve feststellen. Geht man von endlichen (aber trotzdem kleinen) Veränderungen des Zinsniveaus aus, so kann man die *Steigung der Ertragswertfunktion* durch das Verhältnis aus *der relativen Ertragswertänderung* des Projektes in Abhängigkeit von der *relativen Zinsänderung* (Elastizität) darstellen. Dies entspricht dem *Bilden einer Sekante* zwischen zwei Punkten auf der Ertragswertfunktion eines Projekts (vgl. Sekante B auf Ertragswertfunktion A der Abbildung 20). Formelmäßig sieht dieser Zusammenhang so aus:

$$E = \frac{\frac{\Delta EW}{EW}}{\frac{\Delta i}{i}}$$

$$\text{oder: } E = \frac{\Delta EW}{\Delta i} \times \frac{i}{EW},$$

wobei: EW = Ertragswert,
Δ = endliche (aber kleine) Veränderung,
i = Kalkulationszins/Marktzins,
E = Zinselastizität des Ertragswerts.

Eine exakte Angabe der Elastizität ist jedoch lediglich bei infinitesimal kleinen Änderungen des Zinsniveaus möglich, da es sich regelmäßig nicht um *isoelastische Funktionen* handelt, sondern die Elastizität in jedem Punkt der Funktion unterschiedlich groß ist. Es liegen also *Punktelastizitäten* vor. Um von einem bestimmten i ausgehend eine Punktelastizität zu ermitteln, muss man folglich die obige Formel auf marginale Änderungen beziehen. Grafisch entspricht dies dem Anlegen einer Gerade an die Ertragswertkurvenfunktion beim Zinssatz i (vgl. Funktion C bei Abbildung 20). Man lässt also die Zinsänderung gegen Null streben und erhält folgenden Ausdruck:

$$E = \frac{\frac{dEW}{EW}}{\frac{di}{i}}$$

$$\text{oder: } E = \frac{dEW}{EW} \times \frac{i}{EW},$$

wobei: EW = Ertragswert,
i = Kalkulationszins/Marktzins,
d = marginale Änderung.

3. Dynamische Verfahren der Investitionsrechnung

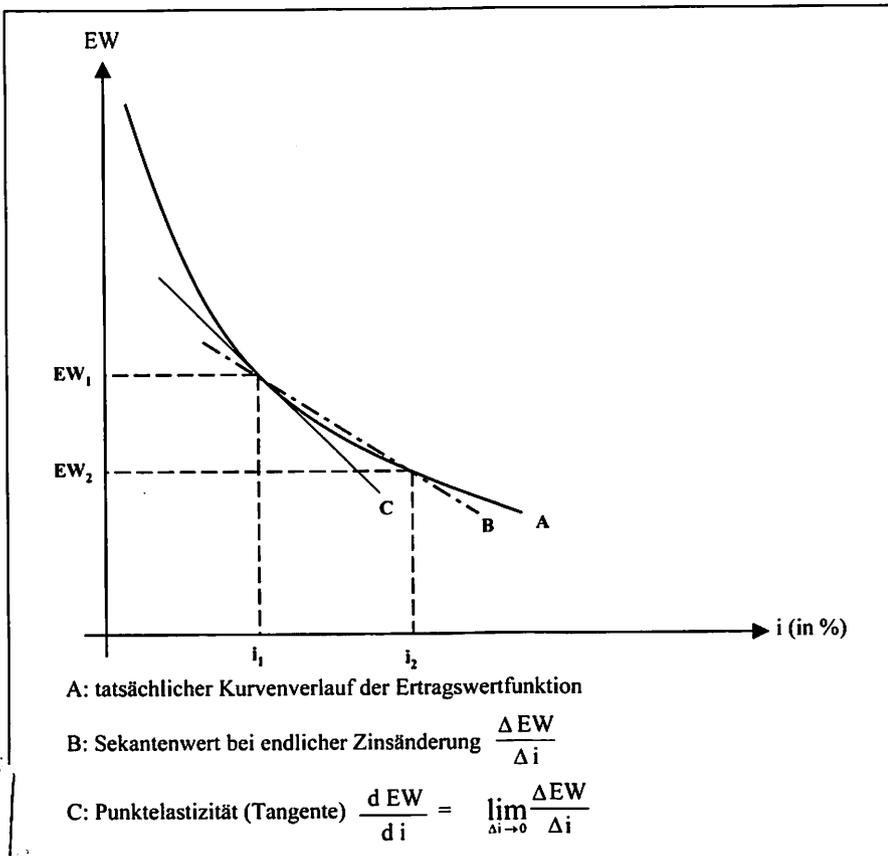


Abbildung 20: Zinselastizität als Steigung der Tangente an der Ertragswertkurve eines Investitionsprojekts

Um das Steigungsmaß der Ertragswertfunktion zu ermitteln, bildet man die *erste Ableitung* des Ertragswerts nach dem Zinssatz i . Ersetzt man EW durch die dahinter stehende Ertragswertformel, so ergibt sich:

$$\text{Schritt A) } E = \frac{\frac{d EW}{d i}}{i} \text{ oder B) } E = \frac{d EW}{d i} \times \frac{i}{EW}.$$

Ausgehend von der bereits oben mehrfach verwendeten Ertragswertformel

$$\text{Schritt C) } EW = \sum_{t=1}^n R_t \times (1 + i)^{-t}$$

II. Investitionsplanung und Wirtschaftlichkeitsrechnung

ergibt sich folgende 1. Ableitung nach dem Zins:

$$\text{Schritt D) } \frac{dEW}{di} = - \sum_{t=1}^n t \times R_t \times (1+i)^{-t-1}.$$

Setzt man die Ableitung D) in den Ausdruck B) ein, so ergibt dies:

$$\text{Schritt E) } E = \frac{- \sum_{t=1}^n t \times R_t \times (1+i)^{-t-1}}{1} \times \frac{i}{\sum_{t=1}^n R_t (1+i)^{-t}}.$$

Stellt man den Ausdruck E) leicht um, so erhält man:

$$\text{Schritt F) } E = \frac{- \sum_{t=1}^n t \times R_t \times (1+i)^{-t}}{(1+i)} \times \frac{i}{\sum_{t=1}^n R_t (1+i)^{-t}}$$

oder, indem man die Nenner austauscht:

$$\text{Schritt G) } E = \frac{- \sum_{t=1}^n t \times R_t \times (1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^n R_t (1+i)^{-t}} \times \frac{i}{(1+i)}.$$

Der linke Teil des letzten Terms ist mit der Formel zur Ermittlung der Duration identisch, während der rechte Teil den Faktor $i/(1+i)$ darstellt.

In der Literatur wird meist die Duration lediglich als Betragsgröße festgestellt und interpretiert, da der *gegenläufige Effekt* zwischen Zinsveränderung einerseits und Kursveränderung andererseits als bekannt vorausgesetzt wird. Die Zinselastizität und die Duration sind also stets durch den exogen bestimmten Faktor¹⁸¹ $i/(1+i)$ miteinander verbunden. Die Zinselastizität eines Projekts lässt sich somit aus der Duration einfach herleiten, indem diese mit dem Faktor $i/(1+i)$ multipliziert wird.

(6) Interpretation und praktische Anwendung von Zinselastizitäten

Für die Projekte A, B, C und D aus obigem Beispiel ergeben sich somit bei einem Kalkulationszinssatz von $i = 10\%$ folgende Zinselastizitäten:¹⁸²

181 Der Faktor ist exogen bestimmt, da der Entscheidungsträger keinen Einfluss auf die Höhe des Kapitalmarktzins hat, sondern dessen Höhe – und damit auch die Größe des Faktors – als Anpasser hinnehmen muss.

182 Die Zinselastizität ist wie alle Elastizitätsgrößen einheitslos, da sie das Verhältnis von zwei auf jeweils gleiche Maßeinheiten lautende Größen (Euro/Euro : %/%) angibt, so dass sich die Maßeinheiten herauskürzen.

3. Dynamische Verfahren der Investitionsrechnung

Projekt A: $E = 3,476 \times (0,1/1,1) = 0,316$

Projekt B: $E = 2,381 \times (0,1/1,1) = 0,217$

Projekt C: $E = 1,445 \times (0,1/1,1) = 0,131$

Projekt D: $E = 5,000 \times (0,1/1,1) = 0,455$.

Wie ist nun die Zinselastizität zu interpretieren? Sie gibt für marginale Änderungen von i die Stärke der zugehörigen Ertragswertänderung an.¹⁸³ Die Elastizität von 0,316 bei Projekt A besagt somit, dass die Stärke der relativen Ertragswertänderung zirka ein Drittel der relativen Stärke der zugrunde liegenden Zinsänderung beträgt (siehe unten).

Grundsätzlich gilt für ein *Investitionsprojekt* folgender Zusammenhang: Je größer die Zinselastizität, um so stärker der Einkommensgewinn bei Zinssenkungen und umso stärker der Einkommensverlust bei Zinssteigerungen. Bei einem *Finanzierungsprojekt* gilt: Je größer die Zinselastizität, um so stärker der Einkommensgewinn bei Steigerungen des Marktzinssatzes und um so stärker der Einkommensverlust bei Marktzinssenkungen.

Kennt man den Ertragswert eines Projekts auf Basis eines bestimmten Kalkulationszinssatzes, so kann man mit Hilfe der Elastizitätskennziffer die durch eine angenommene Zinsvariation verursachte Ertragswertänderung abschätzen.

Diese Rechnung wird im Folgenden für die Projekte C und D aus obigem Beispiel dargestellt. Es soll ermittelt werden, wie stark sich eine angenommene Zinssteigerung von 10% auf 10,25%, d. h. um 0,25 Prozentpunkte auf den Ertragswert der Investitionen auswirkt:

- Für das Projekt C mit einer Elastizität von 0,131 ergibt sich eine Senkung des ökonomischen Werts in Höhe von $-37,58$.¹⁸⁴
- Das Projekt D mit der vergleichsweise höheren Elastizität erleidet eine rechnerische Wertebüße in Höhe von $-130,52$.¹⁸⁵

(7) Kritische Würdigung der Verwendung von Duration und Zinselastizität als Maß für Zinsänderungsrisiken

Mit Hilfe der Duration bzw. der aus ihr ableitbaren Zinselastizität ist es möglich, die Zinsempfindlichkeit von Projekten darzustellen. Darüber hinaus kann für kleine Änderungen des Marktzinssatzes eine hinreichend genaue Abschätzung des auf den Pla-

183 Da es sich bei den Projekten A bis D jeweils um Investitionen handelt, weisen die Kapitalwertkurven einen mit steigendem Zins fallenden Verlauf auf, d. h. die Steigungsmaße sind negativ. Trotzdem ist es üblich, lediglich die Betragswerte der Elastizitäten anzugeben, da der Anwender weiß, dass steigende Zinssätze zu fallenden Ertragswerten und umgekehrt führen.

184 Hier ist es wichtig, exakt zwischen Angaben in Prozent und in Prozentpunkten zu unterscheiden. Die Elastizität von 0,131 bedeutet: Wenn der Zins um ein Prozent steigt, fällt der Ertragswert um 0,131 Prozent. Bezieht man diese Angabe auf den alten Ertragswert von 11474 Euro, so ergibt sich ein Betrag von 15,03 Euro. Im vorliegenden Beispiel erhöht sich jedoch der Zins um 0,25 Prozentpunkte von 10% auf 10,25%. Drückt man diese Steigerung in Prozent des alten Zinsniveaus aus, so bedeutet die Anhebung um 0,25 Prozentpunkte eine Veränderung um 2,5%. Folglich ist die zu erwartende Wertsenkung zweieinhalbmal stärker als oben angegeben, d. h. sie beträgt $2,5 \times 15,03$ Euro = 37,58 Euro. Kurz kann man dies errechnen, indem man folgende Gleichung nach dEW auflöst:

$(dEW \times 10\%) : 11474 \times 0,25\% = 0,131$.

185 Errechnet aus: $(dEW \times 10\%) : 11474 \times 0,25\% = 0,455$.

II. Investitionsplanung und Wirtschaftlichkeitsrechnung

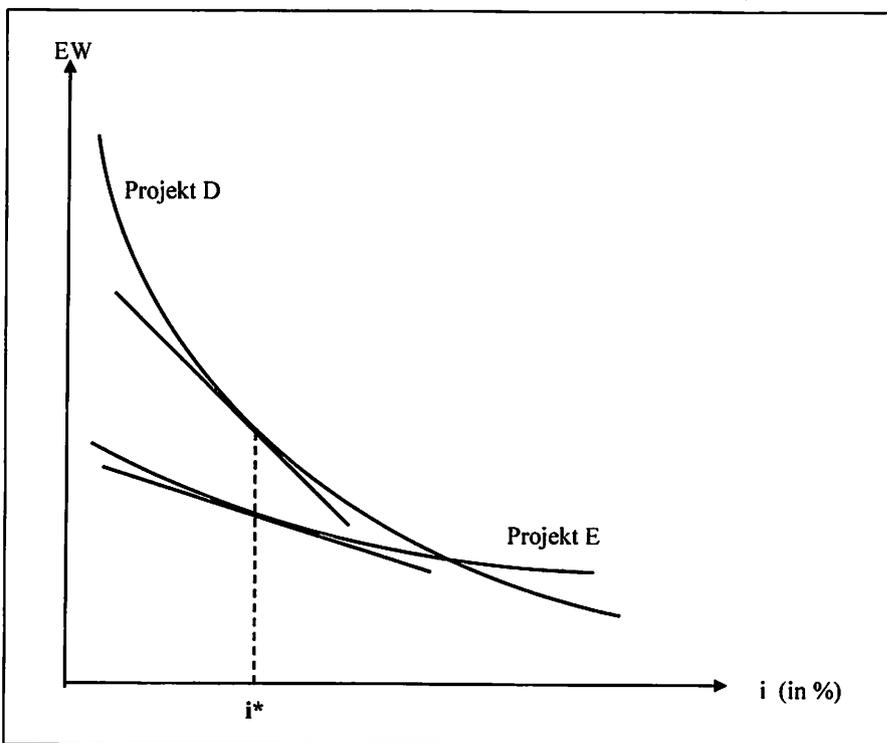


Abbildung 21: Projekte D und E, die bei gegebenem Zinssatz i^* gleichzeitig unterschiedliche Zinselastizität und unterschiedlichen Ertragswert besitzen

nungszeitpunkt bezogenen zinsinduzierten Einkommenszuwachs oder -verlustes vorgenommen werden. Mit der Ermittlung der durchschnittlichen Kapitalbindungsdauer wird also ein einfaches und in einer Vielzahl unterschiedlichster Fälle gleichermaßen anwendbares *Risikomaß* für die Zinsempfindlichkeit von Investitions- und Finanzierungsprojekten gebildet, welches gleichermaßen zur Verringerung bis hin zur vollständigen Vermeidung¹⁸⁶ von *zinsinduzierten* Risiken wie auch zur ganz bewussten Spekulation auf Zinsänderungen dienen kann.

Die *praktische Anwendbarkeit* dieses Konzepts wird durch folgende Probleme *eingegrenzt*:

¹⁸⁶ Mit Hilfe der Duration kann man Investitionen derart zu einem Portefeuille zusammenfassen, dass dieses unabhängig von der Zinsentwicklung am Ende des festgelegten Planhorizonts einen geplanten Wert erreicht. Dieser Vorgang, der insbesondere bei festverzinslichen Finanzanlagen Anwendung findet, wird auch Zinsimmunsierung genannt. Allerdings ist eine vollständige Zinsimmunsierung unter realistischen Bedingungen – insbesondere bei Berücksichtigung von Transaktionskosten – kaum möglich. Vgl. weiterführend *Walz/Gramlich* (Fn. 165), 208–213; *Steiner/Bruns* (Fn. 171), S. 170.

3. Dynamische Verfahren der Investitionsrechnung

- Die *Genauigkeit der Schätzung* sinkt mit wachsender Stärke der Zinsvariation, da es sich bei den Kapitalwertkurven nur um Punkt Elastizitäten handelt.
- Da die Duration jeder Finanzierung oder Investition ständig durch Zeitablauf sinkt, muss in bestimmten Intervallen – je nach gewünschter Genauigkeit – eine *Neuberechnung* dieser Kennzahl und eine hierauf aufbauende Neubewertung der Projekte erfolgen.
- Die Kennziffern Duration und Zinselastizität sind *relative Größen*, d. h. sie berücksichtigen das Volumen des Projekts nicht. Die absolute Höhe des Zinsänderungsrisikos kann erst bestimmt werden, wenn eine Multiplikation der Elastizitätsgröße mit dem Ertragswert des Projekts erfolgt. – Der direkte Schluss, eine höhere Duration bedinge ein betragsmäßig absolut höheres Zinsänderungsrisiko, ist daher nur bei Projekten mit in der Ursprungssituation gleicher Einkommenswirkung möglich.¹⁸⁷

Bei Auswahlentscheidungen über Finanzanlagen kann man unproblematisch davon ausgehen, dass die letztgenannte Prämisse gegeben ist, da der Investor meist ein vorab definiertes Kapitalvolumen anlegen möchte. Gleiches gilt für Finanzierungsprojekte, da die Höhe der benötigten Mittel bekannt ist. Bei *Auswahlentscheidungen über Sachinvestitionen* kann es jedoch durchaus vorkommen, dass die Alternative mit der höheren Duration – ausgehend vom aktuell gültigen Kalkulationszinssatz – auch das höhere Einkommen verspricht. In diesem Fall kann *auf Basis der Duration keine eindeutige Entscheidung getroffen werden*, da man nicht ohne zusätzliche Hintergrundberechnungen feststellen kann, bis zu welcher Zinssteigerung der Einkommensvorsprung eines Projekts das höhere Zinsänderungsrisiko abpuffert. In diesem Fall muss folglich zur Abschätzung des Zinsänderungsrisikos mit Hilfe der Abzinsung der Zahlungsreihe bei alternativen Kalkulationszinssätzen eine *Analyse des Ertragswertkurvenverlaufs* (oder Kapitalwertkurvenverlaufs) erfolgen. Die vorstehende Abbildung 21 bringt diesen Zusammenhang zum Ausdruck.

(8) Weitere Arten und Varianten der Duration

Als Weiterentwicklung der oben ausführlich vorgestellten Duration nach *Macaulay* wurden in der Fachliteratur in der jüngeren Vergangenheit einige ausgewählte Varianten und Verfeinerungen vorgestellt, von denen die wichtigsten hier kurz erläutert werden sollen.

Die *Macaulay-Duration* verwendet in ihrer Berechnungsformel zur Abzinsung aller Zahlungen einen *einheitlichen Zinsfuß*. Dies entspricht der Annahme einer flachen Zinsstrukturkurve und stellt in den meisten Fällen eine hinreichend exakte Annäherung an die Realität dar. Eine exaktere Berechnung der Duration ist nach *Fisher und Weil*¹⁸⁸ (auch als „*Effective Duration*“¹⁸⁹ bezeichnet) im Falle des Vorliegens einer nicht-flachen Zinsstrukturkurve dadurch möglich, dass man für die Abzinsung der Zahlungen jeweils laufzeitspezifische Zinssätze wählt, also für die Abzinsung der nach einem Jahr eintreffenden Zahlung den einjährigen Zinssatz, für die nach zwei Jahren eintreffende Zahlung den zweijährigen Zinssatz usw. Die Abweichung zwischen der Duration nach *Macaulay* und der Duration nach *Fisher und Weil* ist jedoch recht gering,¹⁹⁰ so dass die Sinnhaftigkeit der exakten Berechnung auf wenige Anwendungsbereiche begrenzt ist.

187 Diese Bedingung war bei den oben verwendeten Beispielen stets erfüllt.

188 Vgl. *Fisher/Weil*, Journal of Business 1971, 408–431.

189 Vgl. *Steiner/Bruns* (Fn. 171), S. 173 f.

II. Investitionsplanung und Wirtschaftlichkeitsrechnung

Eine weitere Variante zur *Macaulay*-Duration stellt die *Modified* Duration dar. Die *Modified* Duration kann wie folgt aus der *Macaulay*-Duration abgeleitet werden:

$$\text{Modified Duration} = (\text{Duration nach Macaulay}) / (1+i).$$

Durch diese Umformung ist es möglich, die *prozentuale Kursauswirkung* einer Investition in Abhängigkeit einer Zinsänderung einfach abzuschätzen. Dies ist insbesondere bei der Bewertung von Anleihen nützlich. Die *Modified* Duration gibt dem Entscheidungsträger somit eine Kennzahl, mit der er sehr einfach und bequem die Barwertsensitivitäten (also z. B. zinsinduzierte Kursveränderungen bei börsennotierten Anleihen) überschauen kann.¹⁹¹

Wünscht der Entscheidungsträger statt prozentualer Angaben eine Information über den Absolutbetrag seines Zinsänderungsrisikos, so kann er alternativ auch mit der Kennziffer *Euro*-Duration arbeiten. Sie ergibt sich durch Multiplikation der *Modified* Duration mit dem Absolutbetrag (= Ertragswert) der im Zinsrisiko stehenden Position. Formelmäßig ergibt sich also:¹⁹²

$$\text{Euro Duration} = \text{Modified Duration} \times \text{EW}.$$

Es wird erkennbar, dass die Weiterentwicklungen und Varianten¹⁹³ zur *Macaulay*-Duration nur geringen zusätzlichen Nutzen erbringen, der auf spezifische Anwendungen beschränkt ist.

c) Zusammenfassende Checkliste und Anwendungshilfe für dynamische klassische Partialmodelle

Schritt 1: Dateninput: Geplante Nutzungsdauer des Projekts
Auszahlungen für das Projekt während der Nutzungsdauer
Einzahlungen aus dem Projekt während der Nutzungsdauer
Kalkulationszinsfuß des Investors „i“

Schritt 2: Kapitalwertmethode

Kapitalwert (C_0) = Summe aller auf den Betrachtungszeitpunkt t_0 abgezinsten Ein- und Auszahlungen eines Investitionsprojekts

$$\text{Errechnung: } C_0 = \sum_{t=0}^n (e_t - a_t) (1 + i)^{-t};$$

mit i = Kalkulationszinssatz

$e_t - a_t$ = Saldo der Ein- und Auszahlungen im Zeitpunkt t

Entscheidungsregel: $C_0 > 0$: Projekt ist absolut vorteilhaft
 $C_0 < 0$: Projekt ist nicht absolut vorteilhaft
 $C_{0A} > C_{0B} > 0$: Projekt A ist Projekt B vorzuziehen

190 Vgl. Gerke/Bank (Fn. 158), S. 564.

191 Vgl. Eller (Fn. 123), S. 39.

192 Vgl. Gerke/Bank (Fn. 158), S. 563.

193 Zu weiteren Erscheinungsformen der Duration wie z. B. der Key Rate Duration vgl. Steiner/Bruns (Fn. 171), S. 174–177.